Triplets Pythagoricien

Soient a, b et c trois entiers positifs. On appelle **triplet Pythagoricien** le triplet $(a,\ b,\ c)$ où a, b et c vérifient le théorème de Pythagore, c'est-à-dire que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

1. Démontrer qu'il existe un triplet Pythagoricien où $a = 3$ et $b = 4$.

En mathématique on dit qu'on vient de démontrer **l'existence** des triplets Pythagoricien.

2. Démontrer que si $(a,\ b,\ c)$ est un triplet Pythagoricien alors pour tout entier naturel n, $(na,\ nb,\ nc)$ est un triplet Pythagoricien.

On vient de démontrer qu'il existait une **infinité** de triplets Pythagoricien. L'objectif de la suite de cette étude est alors de trouver des triplets Pythagoricien qui ne sont pas liés au triplet $(3,\ 4,\ 5)$.

On note O l'origine du repère orthonormé. On trace le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 et de centre O.

3. Montrer que si $M(x\ ;\ y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ alors ses coordonnées vérifient $x^2 + y^2 = 1$.

On considère un réel $t \in [-1;1]$. On trace la droite d_t passant par $A(0\ ;\ 1)$ et $B(t\ ;\ 0)$. On place le point M intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite d_t.

4. Placer le point M pour $t = -0.75$, $t = 0$ et $t = 0.5$ sur un dessin.
5. Déterminer l'équation réduite de la droite d_t.

On pose alors $M(X\ ;\ Y)$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et d_t. On admet que X et Y vérifient le système cidessous.

$$(S) : \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y = -\dfrac{1}{t}X + 1 \end{cases} .$$

6. Que dire de la valeur de Y si $X = 0$?

On suppose pour la suite que $X \neq 0$.

7. Résoudre par substitution le système (S) et montrer que si $X \neq 0$ alors
$$\begin{cases} X = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \\ Y = \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \end{cases} .$$
8. Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. En remplaçant t par $\dfrac{p}{q}$, montrer que
$$X = \frac{2pq}{q^2+p^2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{p^2-q^2}{q^2+p^2}.$$
9. Montrer alors que $X^2 + Y^2 = 1 \Leftrightarrow (2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2$.
10. Aider votre professeur de mathématique à trouver 3 nombres entier permettant au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ d'avoir une norme entière.

L'écriture obtenue est **unique**. C'est-à-dire que quelque soit le triplet Pythagoricien, on pourra toujours trouver des entiers p et q permettant d'obtenir les entiers a, b et c du triplet et suivant la formule de la question 9.