DM - On compte une série de succès.

I) Préambule

Soit X une variable aléatoire. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et que $X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.

On appelle loi de probabilité de X, l'ensemble des probabilités des valeurs prises par X. Une loi de probabilité vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall i \in \{1,\ \dots, n\},\ 0 \leq \mathbb{P}(X = x_i) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1.$$

On note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X définie par la formule

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = K) = \sum_{k=0}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Soit p un entier naturel non nul. On considère p lancers identiques et indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée.

Soit X_p la variable aléatoire comptant la série de faces en cours sur un échantillon donné. Si l'échantillon se termine par un pile, on pose alors $X_p = 0$.

	Échantillons	
$p = 4$	$F_1P_2F_3F_4$	$X_4 = 2$
$p = 4$	$F_1F_2P_3P_4$	$X_4 = 0$
$p = 3$	$F_1F_2F_3$	$X_3 = 3$
$p = 7$	$F_1F_2F_3P_4F_5F_6P_7$	$X_7 = 0$

L'objectif de cette étude est de calculer le nombre moyen de succès en fin de série de notre échantillon.

II) Préliminaires.

1. Soit $x \in]0\,;\,1[$. On pose pour tout entier naturel n non nul la fonction f_n d'expression

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, préciser la dérivée de $x \mapsto x^k$.
   (b) En déduire une première écriture de ${f_n}'(x)$.
   (c) Exprimer $f_n(x)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.
   (d) En dérivant cette nouvelle expression, démontrer l'équation (1),

$$(1) \quad : \quad 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n-1)x^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

2. Soit q un réel, démontrer l'égalité (2),

$$(2) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k+1} = q^2 \sum_{k=0}^{n-1} kq^{k-1}.$$

III) Étude de cas particuliers.

1. (a) Donner $X_1(\Omega)$.
   (b) Établir la loi de probabilité de X_1.
   (c) En déduire $\mathbb{E}(X_1)$.
2. Répondre aux questions précédentes pour X_2 puis X_3.
3. Tenter de conjecturer, si cela est possible, une expression de $\mathbb{E}(X_p)$ en fonction de p.

IV) Étude du cas général.

Soit p un entier naturel non nul.

1. Donner $X_p(\Omega)$ en justifiant à l'aide d'exemples les différentes valeurs de X_p.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X_p = p)$.
3. Montrer que pour tout $k < p$,

$$\mathbb{P}(X_p = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

4. Montrer que les probabilités obtenues aux question précédentes permettent de définir la loi de probabilité de X_p.
5. À l'aide des égalités (1) et (2), exprimer $\mathbb{E}(X_p)$ en fonction de p.
6. Étudier la limite de $\mathbb{E}(X_p)$ lorsque le nombre de lancers augmente et interpréter le résultat.

V) Modélisation.

On souhaite retrouver par l'expérience le résultat de la partie précédente.

On rappelle que la ligne `from random import randint` permet d'importer la commande `randint`.

L'appel de `randint(0, 1)` permet de renvoyer, de manière équiprobable, un entier naturel aléatoire égal à 0 ou 1.

1. Compléter le programme Python suivant afin que l'appel de `echantillon(p)` renvoie la valeur de X_p liée à un échantillon qui sera créé pendant l'exécution du programme.

Code Python

```python
from random import randint

def echantillon(p):
    serie_actuelle = ...
    for i in range(...):
        if randint(0, 1) == 1: #Succes
            serie_actuelle += ...
        else:
            serie_actuelle = ...
    return ...
```

2. Compléter le programme Python suivant afin que l'appel de `esperance(n, p)` renvoie la valeur moyenne obtenue par `n` appels de `echantillon(p)`.

Code Python

```python
def esperance(n, p):
    moyenne = ...
    for i in range(...):
        resultat = ...
        moyenne += ...
    moyenne = ...
    return ...

print(esperance(1000000, 2), 2, 1-0.5**2)
print(esperance(1000000, 3), 3, 1-0.5**3)
print(esperance(1000000, 4), 4, 1-0.5**4)
print(esperance(1000000, 5), 5, 1-0.5**5)
print(esperance(1000000, 6), 6, 1-0.5**6)
```