Produit Scalaire

Voici quelques notations importantes pour cette étude.

- l'ensemble des fonctions continues sur $[-1;1]$ qu'on notera dans la suite : $\mathscr{C}_0([-1;1])$.
- l'ensemble des fonctions paires et continues sur $[-1;1]$ qu'on notera dans la suite : **P**.
- l'ensemble des fonctions paires et continues sur $[-1;1]$ qu'on notera dans la suite : **I**.

Définition 1

On considère A et B deux propriétés mathématiques.

Pour démontrer **par contraposée** que

Si A est vraie alors B est vraie

alors on montre que

Si non B est vraie alors non A est vraie.

Exemple 2: Si A est la propriété «pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$» alors non A est la propriété «il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$».

Définition 3

Soit E un ensemble de vecteurs.

On dit que E est stable par combinaisons linéaires si pour tout $\vec{f}, \vec{g} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda \vec{f} + \mu \vec{g} \in E$.

Remarque : On va arrêter de mettre les flèches pour indiquer des vecteurs pour faciliter les calculs.

Définition 4

Soit E un ensemble de vecteurs stable par combinaisons linéaires.

On considère une application $(\cdot \mid \cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$.

On dit que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire si pour tout $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est :

- *Bilinéaire :* $(\lambda f + g \mid h) = \lambda(f \mid h) + (g \mid h)$ et $(f \mid \lambda g + h) = (f \mid g) + \lambda(f \mid h)$.
- *Symétrique :* $(f \mid g) = (g \mid f)$.
- *Définie :* $(f \mid f) = 0 \Rightarrow f = 0$.
- *Positive :* $(f \mid f) \geq 0$.

1. Justifier que l'ensemble $\mathscr{C}_0([-1;1])$ est stable par combinaisons linéaires.

Soient $f, g \in \mathscr{C}_0([-1;1])$. On définit l'application $(\cdot \mid \cdot) :\ \mathscr{C}_0([-1;1]) \times \mathscr{C}_0([-1;1]) \to \mathbb{R}$ par

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

2. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est symétrique.
3. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est bilinéaire. *On pourra utiliser la symétrie de l'application pour éviter de montrer les deux égalités.*
4. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est positive.
5. Dans cette série de questions, on se propose de montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est définie.

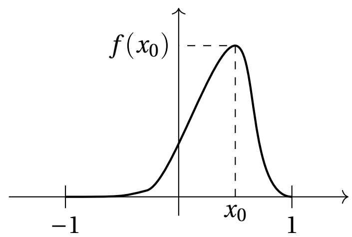
   Pour cela, on considère pour le moment une fonction f, continue et positive non nulle. Il existe donc $x_0 \in [-1;1]$ tel que $f(x_0) > 0$.

   On suppose dans la suite que $x_0 \in]-1;1[$. On reviendra sur cette supposition plus tard dans l'étude.

   On admet que par continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \subset [-1;1]$ et tel que

$$\text{pour tout } x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], \quad f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}.$$

(a) Trouver graphiquement α qui fonctionne pour la fonction ci-dessous.



(b) Montrer en utilisant la relation de Chasles que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \geq \alpha f(x_0).$$

(c) En déduire que l'intégrale d'une fonction positive non nulle sur $]-1;1[$ est strictement positive.

On admet alors que l'intégrale d'une fonction positive non nulle sur $[-1;1]$ est strictement positive. *Vous pouvez adapter la démonstration quand* $x_0 = -1$ *ou* $x_0 = 1$.

(d) Démontrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est définie. *Pour cela on pourra faire un raisonnement par contraposée en utilisant le résultat admis plus haut.*

On vient donc de démontrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[-1;1]$. On peut donc définir des éléments orthogonaux.

6. Montrer que les fonctions f et g sont orthogonales où

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x.$$

7. On considère dans la suite de questions suivantes une fonction f d'expression, $f(x) = x^2 + x + 1$.

   (a) Montrer que si g est une fonction affine, alors il existe $m, p \in \mathbb{R}$ tels que $(f \mid g) = \dfrac{2}{3}(4p + m)$.

   (b) En déduire que toute fonction affine orthogonale à f est proportionnelle à la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{4}$.

8. Soient $f \in \mathbf{P}$ et $g \in \mathbf{I}$. Montrer que f est g sont orthogonales.

On peut également induire une norme à notre produit scalaire. On pose pour toute fonction f continue sur $[-1;1]$, la norme de la fonction f, $N(f)$, définie par

$$N(f) = \sqrt{(f \mid f)}.$$

9. Déterminer la norme de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la norme de $f_n : x \mapsto x^n$.