DM - Compréhension graphique du déterminant

Partie A : Intuition géométrique du déterminant.

On se propose dans cette partie de développer une intuition géométrique du déterminant de deux vecteurs.

On a représenté dans le schéma ci-dessous deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dont les coordonnées vérifient :

$$x > x' \quad \text{et} \quad y' > y.$$

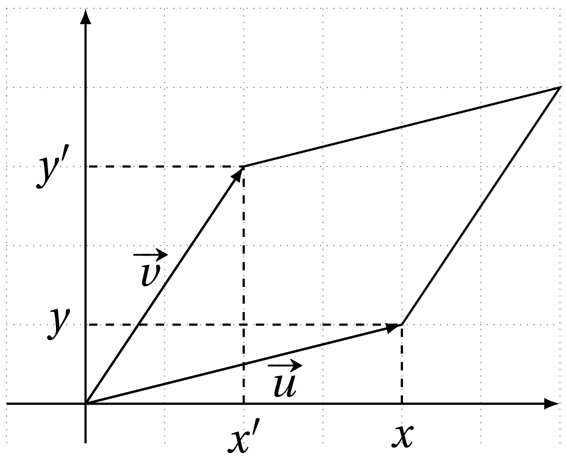


Figure 1

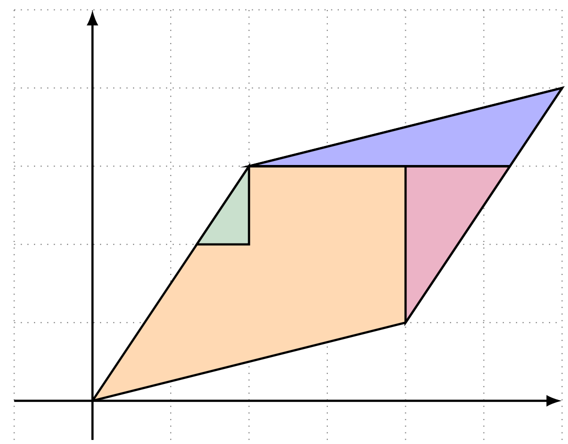
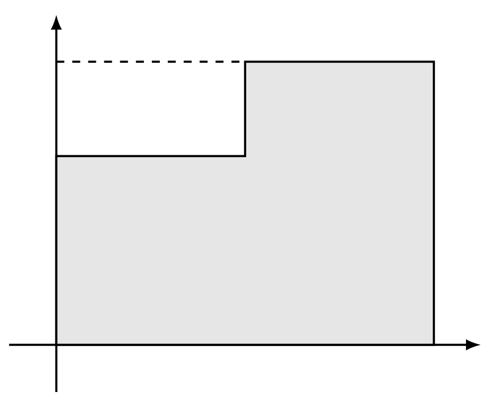


Figure 2

1. Recopier la *Figure* 2 sur une feuille de brouillon dans l'optique de la manipuler par la suite.
2. Découper votre figure et replacer les différentes pièces colorées de manière à obtenir la figure suivante.



3. Déterminer l'aire de la partie grise à partir de l'aire de deux rectangles habilement choisis et dont on déterminera les dimensions à partir des données de l'énoncé.
4. En déduire le déterminant semble être l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Partie B : Démonstration par le calcul.

On se propose dans cette partie de démontrer par le calcul que le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représente l'aire du parallélogramme formé par les représentants de ces deux vecteurs d'origine l'origine du repère.

Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x > x'$ et $y' > y$. On pose les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et O tels que :

- $O(0\,;\,0)$
- $A(x\,;\,y')$
- $C(x\,;\,y)$
- $E(x'\,;\,y'-y)$
- $F(x'\,;\,y')$
- $G(x\,;\,0)$
- $H(x+x'\,;\,y+y')$
- $I(x+x'\,;\,y')$
- $J(0\,;\,y'-y)$
- Le point B est le point de la droite (CH) d'ordonnée y'
- Le point D est le point de la droite (OF) d'ordonnée $y'-y$

Voici une figure représentant la situation :

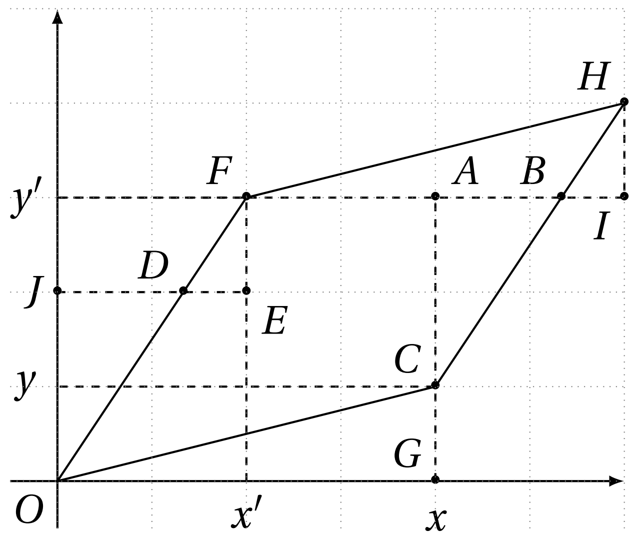


Figure 3

1. On pose $D(X\,;\,y'-y)$. L'objectif de cette série de questions est déterminer la valeur de X.
   (a) Montrer que $\det(\overrightarrow{OD}\,;\,\overrightarrow{OF}) = Xy' - (y'-y)x'$.
   (b) En déduire que le point D appartient à la droite (OF) si et seulement si $X = \dfrac{(y'-y)x'}{y'}$.

On a démontré que $D\left(\dfrac{(y'-y)x'}{y'}\,;\,y'-y\right)$.

2. En vous aidant de la question précédente, montrer que $B\left(x+\dfrac{x'(y'-y)}{y'}\,;\,y'\right)$.
3. Montrer alors que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$, que $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{CA}$.
4. En déduire que le triangle ABC est l'image du triangle JDO par la translation de vecteur $\vec{u}$.
5. Montrer que le triangle BIH est l'image du triangle DEF par la translation de vecteur $\vec{u}$.
6. Montrer que le triangle FBH est l'image du triangle OGC par la translation de vecteur $\vec{u}$.

On a donc montré que l'aire du parallélogramme est bien égale à celle du grand rectangle moins l'aire du petit rectangle de la partie précédente. Il reste à prouver que l'aire du petit rectangle est bien égale à $x'y$.

7. Montrer que $FE = y$.
8. En déduire le théorème dans le cas où $x > x'$ et $y' > y$.