DM - Autour de la colinéarité.

On rappelle que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

De plus on définit le **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ par la formule suivante

$$\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = xy' - yx'.$$

<u>Partie A :</u>

L'objectif de cette partie est de montrer les liens entre colinéarité et calcul du déterminant des vecteurs.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires en déterminant le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
   (b) Montrer que $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$.
2. Répondre aux mêmes questions pour les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. Calculer le déterminant des vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Les vecteurs sont-ils colinéaires ?

On remarque que lorsque les vecteurs sont colinéaires, le déterminant de ces deux vecteurs est nul. Est-ce un hasard ?

4. On considère x, y, x' et y' des réels. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On suppose dans cette suite de questions que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   (a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} ky \\ ky \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire la valeur de $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

Ainsi, on vient bien de montrer que si deux vecteurs sont colinéaires, alors leur déterminant est nul. On peut maintenant se poser la question de la réciproque : si le déterminant de deux vecteurs est nul alors, est-ce que les deux vecteurs sont colinéaires ?

5. Dans cette série de questions, on considère deux vecteurs de déterminant nul tels que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et où x' et y' sont non nuls.
   (a) Montrer que si $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$.
   (b) On pose $k = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$. En déduire que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Cela ne suffit pas, il faut montrer que la réciproque est vraie quelque soit les valeurs de x' et y' ! On a montré le résultat en supposant que $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$.

6. Quel est le contraire de la propriété mathématique $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$?
7. Dans la série de questions suivante, on suppose que $x' = 0$ et que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont de déterminant nul.
   (a) Montrer que $x = 0$ ou $y' = 0$.
   (b) Montrer que dans le cas où $y' = 0$ alors le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur nul. *Le vecteur nul étant colinéaire à tout vecteur, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc bien colinéaires.*
   (c) Montrer que dans le cas où $x = 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
8. Faire de même dans le cas où $y' = 0$.

Avec toutes ces questions nous avons donc montré que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$.

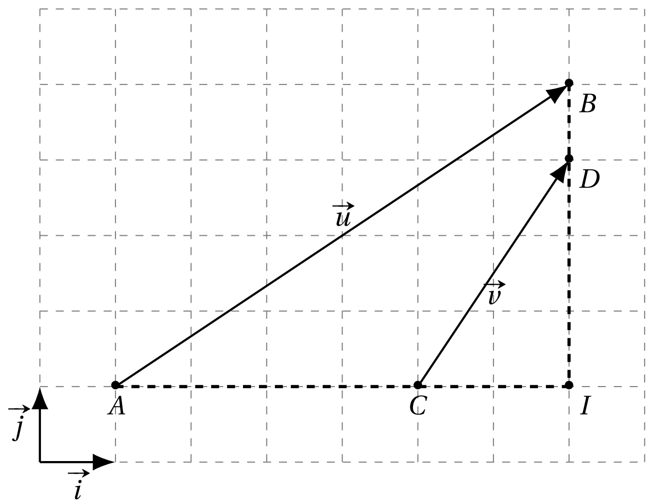
Partie B :

Dans cette partie, on se propose de comprendre le liens entre la définition de la colinéarité et la direction des vecteurs. Si on regarde la définition de la colinéarité donnée dans cette activité, on voit qu'il n'y a aucune mention de la direction des vecteurs dans celle-ci.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs colinéaires. On suppose dans cette activité que x, y, x' et y' sont tous des nombres positifs strictement positifs. On choisit arbitrairement que $x > x'$ et que $y > y'$ (sinon on a juste à échanger les noms des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Ainsi, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentent des translations de gauche à droite et de bas en haut.

Dans un repère orthonormée $(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on représente deux vecteurs qui vérifient ces conditions. On pose alors les point A, B, C, D et I tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et tel que les triangles ABI et CDI soient rectangles en I.



1. Justifier que $AI = x$.
2. Faire de même avec les longueurs CI, ID et IB.
3. À l'aide d'un théorème de collège, montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient l'égalité

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}.$$

4. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $x'y - y'x = 0$.
5. Conclure à l'aide de la partie A.

Attention, le résultat n'est que démontré pour x, y, x' et y' des réels strictement positifs. Il faudrait adapter le dessin fait en fonction du signe des coordonnées de chacun des vecteurs.