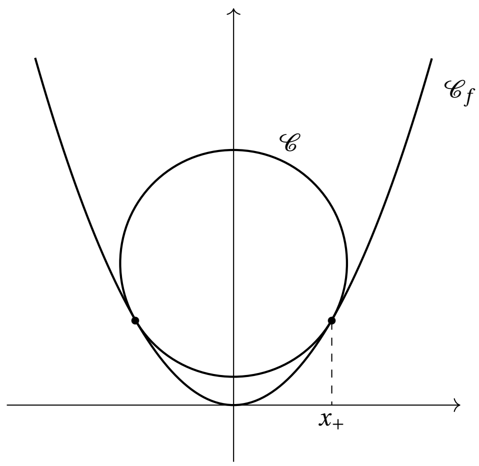
DM - On pose un cercle dans une parabole.

On considère une fonction f du second degré d'expression $ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

Soit R un réel strictement positif. On considère $\mathscr{C}$ une cercle de rayon R.

On cherche le centre de $\mathscr{C}$ pour que le cercle ait exactement deux points d'intersection avec la courbe $\mathscr{C}_f$ sans la traverser. Pour cela, on doit trouver une condition sur les coordonnées du centre du cercle afin que le cercle et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ admettent exactement deux tangentes communes.

On note $(x_C\ ;\ y_C)$ les coordonnées du centre de $\mathscr{C}$ et x_+ un réel strictement positif.



1. Justifier, par des arguments de translation, pourquoi il est cohérent de n'étudier que la situation où $f(x) = ax^2$ comme représentée ci-dessus.
2. En déduire l'abscisse du centre de $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_{x_+} à $\mathscr{C}_f$ en x_+.
4. Donner l'équation du cercle $\mathscr{C}$.
5. En déduire que l'ordonnée d'un point du cercle vérifie l'une des deux équations suivantes :

$$y = y_C - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = y_C + \sqrt{R^2 - x^2}.$$

6. Justifier pourquoi on peut se limiter à l'étude de la fonction g d'expression $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} + y_C$. On précisera le domaine de définition de cette fonction.
7. Donner le domaine de dérivabilité de g puis déterminer $g'(x)$ sur son domaine de dérivabilité.
8. En déduire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse x_+.
9. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les mêmes si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} 2ax_+ &= \dfrac{x_+}{\sqrt{R^2 - {x_+}^2}} \\ a{x_+}^2 &= y_C - \sqrt{R^2 - {x_+}^2} \end{cases}.$$

10. En manipulant la première équation, montrer que ${x_+}^2 = R^2 - \dfrac{1}{4a^2}$.
11. En déduire finalement en subtituant ${x_+}^2$ dans la deuxième équation que

$$y_C = aR^2 + \frac{1}{4a}.$$

On a donc déterminé les coordonnées du cercle solution du problème dans le cas où la parabole est la courbe représentative d'une fonction proportionnelle à la fonction carré.

12. Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré quelconque avec $a > 0$. Déterminer les coordonnées du cercle $(x_C\ ;\ y_C)$ solution du problème.

On considère la parabole d'équation $\mathscr{P}$: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

13. Déterminer les coordonnées du cercle de rayon 4 solution du problème lié à la parabole $\mathscr{P}$. Vérifier votre résultat en traçant le cercle dans le graphique ci-dessous.